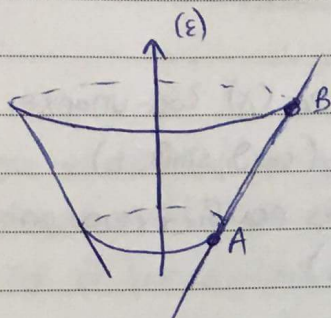


Φύλλαδιο 10

- 2.10 Να βρεθεί η εξίσωση της επιφάνειας που προκύπτει περιστρέφοντας την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ γύρω από την ευθεία $(\varepsilon): (6x=3y=2z)$

Λύση



Ένα επίπεδο κάθετο προς τον άξονα (ε)

είναι το: $\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{x + 2y + 3z = 0}$$

Η κινούμενη περιφέρεια έχει εξισώσεις:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \\ x + 2y + 3z = \lambda \end{cases} \quad (n).$$

Η ευθεία που διέρχεται από τα A και B είναι:

$$\left\{ \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases}$$

Για να βρούμε ποια εξίσωση πάρουν τα ρ, λ θεωρούμε

το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \\ x + 2y + 3z = \lambda \end{cases} \begin{matrix} \text{εξισώσεις} \\ \text{περιφέρειας} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \\ x = \lambda/6 \\ y = \lambda/6 \\ z = \lambda/6 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases} \begin{matrix} \text{εξισώσεις} \\ \text{ευθείας} \end{matrix}$$

$$\text{Με ανατοική των } x, y, z \rightarrow 3 \frac{1^2}{36} = \rho^2 \Rightarrow 1^2 = 12\rho^2$$

Άρα η εξίσωση της επιφάνειας που ζητάμε είναι:

$$(x+2y+3z)^2 = 12(x^2+y^2+z^2)$$

1.11

Μια επιφάνεια έχει εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$$

ν.δ.ο είναι επιφάνεια εκ περιστροφής

Λύση

Θα πρέπει να πραγματοποιήσουμε την εξίσωση στην μορφή:

$$\varphi(x^2+y^2+z^2, \alpha x + \beta y + \gamma z) = 0$$

Η εξίσωση γράφεται ως:

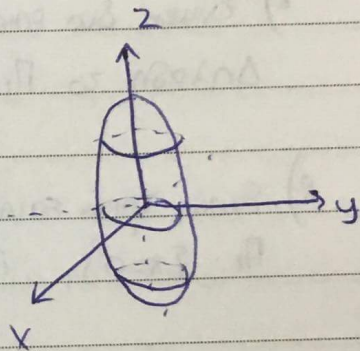
$$x^2 + y^2 + z^2 - z^2 + \frac{z^2}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_A - \frac{3}{4} z^2 - 1 = 0$$

$$\text{Θεωρούμε } \varphi(A, B) = A - \frac{3}{4} B^2 - 1$$

Έχουμε επιφάνεια εκ περιστροφής με άξονα την ευθεία (ε) που περνά από το $A(0,0,0)$ και καθετί προς τον άξονα $z=0$

Ο άξονας (ε) είναι ο άξονας z.



8/8

1.17

Τι παριστάνει στο $\mathbb{R}^3$ καθεμία από τις εξισώσεις

1) $xz=0$

2) $xyz=0$

3) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$

4) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x - 8y - 6z + 13 = 0$

5) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 2x + 8y - 6z - 3 = 0$

6) $x^2 - 2y^2 - z^2 - 2x + 8y + 6z - 21 = 0$

7) $2x^2 + y^2 = 1$

8) $x \cdot (x-1+y)(y-1) + z^3 = 0$

Λύση

1) Ένωση δύο επιπέδων.

Δηλαδή το $\Pi_1: \{x=0\}$ και $\Pi_2: \{z=0\}$

2) Ένωση τριών επιπέδων

$\Pi_1: \{x=0\}$, $\Pi_2: \{y=0\}$ και $\Pi_3: \{z=0\}$

Είναι ομογ και υνoγος: $f(x,y,z) = xyz$

$$f(tx, ty, tz) = tx \cdot ty \cdot tz = t^3 f(x,y,z)$$

3) Ευθεία

$$\xi(\mathbb{R}) = (1, -3, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1)$$

$$= (1, -3, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1)$$

4) ~~Κυλινδρος~~ Κυλινδρος πανω από την ελλειψη

$$(x): \{2x^2 + y^2 = 1, z=0\}$$

$$4) x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x - 8y - 6z + 13 = 0$$

$$x^2 + 2y^2 - 8y - 2x + z^2 - 6z = -13$$

$$x^2 - 2x + 1 + 2(y^2 - 4y + 4) + z^2 - 6z + 9 = -13 + 1 + 9 + 8$$

$$(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$$

ελλειψοειδές

$$5) x^2 - 2y^2 + z^2 - 2x + 8y - 6z - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x + 2y^2 + 8y + z^2 - 6z = 3$$

$$x^2 - 2x + 1 - 2(y^2 - 4y + 4) + z^2 - 6z + 9 = 3 + 1 - 8 + 9$$

$$(x-1)^2 - 2(y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$$

ελλειψοειδές

$$6) x^2 - 2y^2 - z^2 - 2x + 8y + 6z - 21 = 0$$

$$x^2 - 2x - 2y^2 + 8y - z^2 + 6z = 21$$

$$x^2 - 2x + 1 - 2(y^2 - 4y + 4) - z^2 + 6z = 21 + 1 - 8 - 9$$

$$(x-1)^2 - 2(y-2)^2 - (z-3)^2 = 5$$

8) Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση στην μορφή:

$$F(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0 ;$$

Παρατηρούμε ότι:

$$0 = \textcircled{x} \cdot (x+y-1) \textcircled{(y-1)} + \textcircled{z}^3$$

$$= x^2(y-1) + x \cdot (y-1)^2 + z^3$$

$$= (x, y-1, z) = 0 \quad \text{κυβος με κορυφή } K(0, 1, 0)$$